Efficient tensor completion for color image and video recovery: Low-rank tensor train

【摘要】本文提出了一种新的张量补全处理方法，它恢复用张量所表示的数据的缺失项。该方法基于张量列(TT)秩，，它能够从张量中捕获隐藏的信息，张量从一个平衡的矩阵化方案到它的定义。因此，张量补全的新优化公式并给出了两种新的求解算法。第一种方法称为简单的低阶张量补全通过张量列(SiLRTC-TT),它与基于TT秩的最小化核范数密切相关。第二种是多线性的矩阵因式分解模型逼近一个张量的TT秩，称为通过张量列的平行矩阵分解来实现的张量补全 (TMac-TT)。张量增大将低阶张量转化为高阶张量的方案是还建议加强silrtc-tt和TMAC-TT彩色图像与视频恢复的仿真结果显示我们的方法比所有其他方法明显的优势。

**索引项**--彩色图像恢复，视频恢复，张量补全，张量列分解，张量列秩，张量训练核范数，Tucker分解

**介绍**

张量是多维数组，是矩阵和向量的高阶推广。张量提供表示多维数据的自然方法，其条目被几个连续或离散的变量索引。利用张量及其分解自那时以来，过程数据变得越来越流行。例如，彩色图像是定义的三阶张量。空间变量的两个指标和颜色的一个指标模式。由彩色图像组成的视频是四阶的。具有时间变量附加索引的张量。张量居住在极高维数据空间中，然而，张量在实际应用中，往往是低级的。因此，它们可以有效地预测到更多。通过底层分解，例如 (CP)、Tucker和张量列(TT)或矩阵乘积状态(MPS)，到较小的子空间，

以低秩矩阵补全的成功为动力(LRMC)，最近的努力是为了扩大概念到低秩张量补全(LRTC)。事实上，LRTC已在计算机视觉、图形、信号等领域得到应用。加工和机器学习。共同目标是从张量的部分项中恢复丢失的项。观察到的实体。LRTC仍然是一个巨大的挑战由于对张量秩的计算，定义为CP秩，已经是NP难问题了。有试图通过tucker秩接近LRTC。tucker秩的一个概念缺陷是它的组成部分是基于不平衡的矩阵化方案(一种模式相对于其他模式)的矩阵秩吗。上层每一个秩的界限往往很小，而且可能不适合描述张量的全局信息。在此外，矩阵秩极小在矩阵更平衡的情况下才是有效的。因为矩阵的秩不是大于min{n，m}，其中m和n是矩阵的行和列，分别为高比率max{m，n}/min{m，n}有效地排除了矩阵秩最小化对于目前的先进技术来说的需要。这并不令人惊讶，LRMC方法隐式假设考虑的矩阵是平衡的。

张量秩的另一种类型是tt秩，它构成由良好平衡矩阵化而成的矩阵的秩方案，即将张量沿模式排列的矩阵化。在[8]中定义了TT秩，但低秩张量分析是通过在物理学早期的工作中可以看到TT秩，特别是量子动力学模拟[27]，[28]。实现低TT秩张量的计算效率在数值线性代数中的应用。[29]-[31]。对于奇异值采用低TT秩张量。[32]中大规模矩阵的值分解(SVD)[33]。张量的交替最小二乘算法近似[34]，[35]也用于线性解。方程和特征向量/特征值逼近。在[36]中，[37]低TT秩张量也被用于实现大尺度最小二乘最陡下降迭代法问题。所有这些作品的共同假设是：所有在计算过程中使用的张量计算实用性较低。TT有多低秩张量与现实世界的问题并不是真的相关。他们的担心。TT分解在字段中的应用除了数学和物理之外，很少有人看到，仅最近TT在机器学习中的应用[38]。如上面提到的彩色图像和视频就是最好的例子。，因此它们的完全性可以表示为张量。完工问题。然而，目前尚不清楚TT是否基于秩的补全对于实际的解决方案是有用的。本文的主要目的是证明TT秩是正确的。一种基于TT秩的LRTC方法优化。论文的贡献如下：

1. 利用量子中vonNeumann熵的概念亚洲代码：1606.01500v1[比照NA]2016 6月5日2信息论[39]，我们证明了tucker秩不包含张量的全局相关性。因此不太适合LRTC。自TT以来由平衡矩阵组成的秩构成矩阵化方案，它能够捕获。张量项的全局相关性，因此是LRTC的有前途的工具。
2. 我们表明，与tucker秩不同的是，tucker级别通常很低，而且对于优化没有兴趣，TT级优化是LRTC的一种可处理的配方。两种新算法，以解决基于TT级别优化的问题。LRTC问题。第一种算法称为简单低阶算法张量列张量补全(SiLRTC-TT)一种基于TT核范数的优化问题。第二种算法叫做张量补全张量列并行矩阵因式分解(TMacTT)使用多元线性矩阵分解模型近似张量的TT秩，绕过计算昂贵的SVD。回避直接TT分解使所提出的算法能够优于其他最先进的张量补全算法。
3. 我们还介绍了一种新技术---(KA)用a表示低阶张量。不改变总数的高阶张量条目。家训计划提供了一个完美的途径获取可视化数据的高阶张量表示通过最大限度地挖掘基于TT秩的潜力优化彩色图像和视频补全。tmac-tt在恢复视频方面表现特别好。95%的条目缺失。

文的其余部分按以下方式组织。第二节介绍了张量分解的表示法和简要评述。在第三节中，LRTC的传统表述回顾了TT秩比Tucker秩的优点。讨论了全局关联项，然后提出了TT秩概念中LRTC的重新定义。第四节介绍了基于TT秩求解LRTC问题的两种算法。然后讨论计算复杂度。第五节，提议张量增强方案，称为Ka。第六节，实验结果。第七节，我们总结了我们的工作。

**||张量秩**

张量的一些数学符号和预备是从[1]中通过的。张量是多维数组。它的顺序或模式是它的维数。标量是用小写字母表示的零阶张量。(x，y，z，…)向量和矩阵是一阶和二阶。用黑体字表示的张量阿高阶张量(三级或以上张量)为用书法字母(X，Y，Z，…)表示。

**|||张量补全**

本节首先回顾了传统的配方。基于tucker秩的LRTC。然后，我们建议基于TT秩优化的LRTC新方法引出两个新的优化公式，一个基于核范数极小化和多线性矩阵上的另一种方法因式分解

1. 常规张量补全

因为张量补全是基于矩阵的补全后，我们在介绍前对后者进行了概述。恢复矩阵T∈R的缺失项M×n从子集给出的部分已知项中，可以用著名的矩阵秩优化问题研究：

通过上述分析，我们发现X(K)的秩rk是只能够捕捉一种模式之间的关联K和其他人。因此，问题(11)并没有涉及到。说明几种模式与其他模式之间的相关性。张量，因此可能不足以补全高序张量(N>3)。为了克服这个弱点，在下一个小节，我们将讨论lrtc优化tt问题。秩，它由更平衡的矩阵定义，并且能够的模式之间的隐藏关联。张量更有效

B.TT秩优化张量补全

(11)中解决LRTC问题的一种新方法是通过以下TT秩优化

**||||**

**|||||**

**||||||**

广泛的实验是用合成数据进行的，彩色图像和视频。对所提出的算法进行了基准测试。对TMac[21]，TMac-Square，SiLRTC[15]，SiLRTC-平方[43]与最先进的张量补全方法FBCP[46]和STDC[47]1。另外，我们也基于tt秩的优化算法[34]，[35]。

对这些算法的仿真进行了测试。不同的测试数据缺失率(MR)，并定义了mr。如先生=pQNK=1 Ik，(41)其中p是缺失项的数目，它被选中。在均匀分布的基础上随机地从张量T。为了衡量LRTC算法的性能近似恢复之间的平方误差(RSE)张量X和原来的T，定义为，rse=X？T F/T F.(42)我们提出的算法的收敛性准则是通过计算张量X的相对误差来定义在连续两次迭代之间，如下所示：=Xl1？Xlft-F≤tol，(43)在哪里，tol=10？4和最大迭代次数最大值=1000。这些模拟是在MATLAB环境

1. 初步参数

在实验中，必须有三个参数初始化：加权参数α和β，以及初始TT级，i=1，...，N？1)麦迪广场。首先，定义了αk的权重：αk=δkPN？1K=1δk与δk=min(Y)钾L=1白尔，ynl=k1(44)其中k=1，…，N？1。通过这种方式，我们分配了大型加权到更平衡的矩阵。正参数由βk=fαk选择，其中f是经验性选择的。的[0.01，0.05，0.1，0.5，1]中的下列值之一这样的方法，使算法的性能最好。同样，对于SiLRTC和TMac的权重选择如下：αk=IKpnK=1 Ik，(45)其中k=1，...，N。βk=fαk，其中f是从在[0.01，0.05，0.1，0.5，1]中的下列值，该值将给出最好的表演。获得tmac、tma-tt和泰玛-平方，每级ri是有界的，因为只保留满足下列不等式的奇异值：λ[我]Jλ[我]1>第四，(46)与j=1，…，ri、阈值th和{λ[我]J}假定为按降序排列。选择这个条件是为了低秩(小相关)的矩阵将有。更多的奇异值被截断。我们也是根据经验选择的。基于算法的性能。重要的是要强调这些初始参数可以影响算法的性能。因此，建议的算法性能可能不一定是最佳的，未来的工作需要考虑。自动确定最优TT秩和权重的方法[46]和/或适应方法[21]。

1. 综合数据补全

我们首先对两种不同类型的中综合产生的低阶张量。提前知道tucker和TT秩的方式。1)低TT秩张量的完备性：n阶张量T∈RTT秩(R1，R2，…，Rn？1)的I1×I2···×IN生成，使其元素由TT格式表示。[8]。具体来说，它的元素是ti1i2...in=A[1]i1阿[2]i2··A[n]在，其中A[1]∈RI1×R1，A[N]∈RRn×IN与A[k]∈r随机生成k=2，…，N？1的rk？1×Ik×rk。关于标准高斯分布N(0，1)。为了简单起见，在本文中我们设置了tt的所有组件。对每一种模式的维数进行同样的排序，即R1=R2=···=Rn？1=r，I1=I2=···=IN=I。rse相对于mr的情节显示在数字。2对于不同尺寸的张量，40×40×40×40(4D)，20×20×20×20×20(5D)，10×10×10×10×10×10(6D)和10×10×10×10×10×10(7D)和相应的TT秩元组为(10，10，10)(4D)，(5，5，5)(5D)，(4，4，4，4，4)(6d)及(4、4、4、4、4)(7D)。从情节上我们可以看到在大多数情况下，TMAC-TT显示出最佳的性能.特别是，Tmac-tt尽管存在较高的张量，但仍能成功恢复张量在大多数情况下，失踪率高的情况下，例如MR=0.9，它可以用rse≈10？4恢复张量。。更重要的是，所提出的算法silrtc-tt和TMAC-TT通常比相应的对手表现得更好，例如，在大多数情况下，SiLRTC和TMac。FBCP和ALS随机合成数据的最差结果，所以对于剩下的合成数据实验，只有SiLRTC，SiLRTCSquare，silrtc-tt，tmac-Square和tmac-tt是比较

B.

综合数据补全

我们首先对两种不同类型的

在这种情况下合成产生的低级张量

Ttucker和TT秩是事先已知的。

1)低tT秩张量的补全:n阶

张量T∈R

TT秩的I1×I2···×IN(R1、R2、…、Rn?1)

生成这样的元素,其元素由TT格式表示,

&bra;8&ket;.

具体而言，其元素是Ti1I2...In=A

&bra;1&ket;

I1

A

&bra;2&ket;

I2

···A

&bra;N&ket;

在

本发明的目的是提供一种

其中&bra;1&ket;∈R

I1×R1

,a&bra;n&ket;∈R

Rn×In和A&bra;k&ket;∈

R(R)

RK?1×Ik×Rk，K=2，.

。

。

N?

随机生成1

关于标准高斯分布N(0，1)。

为简单起见，在本文中，我们设置了TT的所有组件

秩相同，因此每个模式的维，即E。

R1=R2=···=Rn?1=R,I1=I2=···=In=I。

RSE相对于MR的曲线示于

图。

2对于不同尺寸的张量,40×40×40×40(4d),

20×20×20×20×20(5d),10×10×10×10×10×10(6d),

10×10×10×10×10×10×10(7d)和相应的TT

秩元组为(10，10，10)(4d)，(5，5，5，5)(5d)，(4，4，4，4，4)

(6d)和(4，4，4，4，4，4)(7d)。

从图中我们可以看到

TMAC-TT在大多数情况下显示出最佳性能。

特别是,

TMAC-TT可以成功地恢复张量，尽管很高

缺失比率，其中在大多数情况下具有高缺失比率，

例如，

MR=0.9，能用RSE≈10?4恢复张量

。

更重要的是,所提出的算法SIRTRTC-TT和

TMAC-TT通常比它们对应的对应方更好地执行,

我...

在大多数情况下，SILRTC和TMAC。

FBCP和ALS

具有随机合成数据最坏的结果，因此，

剩余的合成数据实验,仅SilRTC,SilRTCsquare,

SilRTC-TT、TMAC、TMAC-Square和TMAC-TT

与其他产品相比。

特别是TMAC-TT总是成功地恢复

具有任何TT秩和缺失比率的张量。

2)低tucker秩张量的补全：现在让我们

将我们提出的算法应用于合成随机张量

低tucker级别的。

n阶张量T∈R

I1×I2··×IN

Ttucker秩(R1，R2，…，Rn)由T＝

G×1A(1)×2A(2)···×NA(n)

其中核张量G∈

R(R)

R1×R2···×Rn和因子矩阵A(k)∈R

RK×Ik，K=

1、.

。

。

利用标准高斯随机生成N，

分布n(0，1)。

这里，我们选择R1=R2=···=

简单起见,Rn=R,I1=I2=···=In=I。

为了

比较算法之间的性能，我们将显示在

该图

5应用不同算法的相位图

补全尺寸20×20×20×20×20的5D张量

Tuckerrankrvariesfrom2to16and=10?2

。

我们可以看到

TMAC和TMAC-TT都比

其他。

此外，SilRTC-TT在以下情况下表现出更好的性能

与SilRTC和SilRTC-square相比。

类似地，TMATT

比它的特殊情况TMAC-square好。

总之，我们可以看出，虽然张量是

综合产生具有低tucker排名，建议

算法仍然能够产生结果,

与通过基于tucker的算法所获得的结果一样好。

首先进行合成数据实验,

测试所提出的算法。

为了更好的比较

在这些算法之间，我们对这些方法进行了基准测试

真实世界数据，例如彩色图像和视频，其中

张量的秩不是事先已知的。

这些将

在随后的子部分中看到。

1. 补全图像

这些彩色图像被称为辣椒，莉娜和豪斯用来测试算法。所有的图像最初都是由大小相同的三阶张量表示。256×256×3。注意，当补全三阶张量时，我们不要期望所建议的方法会战胜由于张量的TT秩是tucker秩的特例。因此，表现为算法应该是相互比较的。然而，对于比较不同类型间性能的目的实际数据(图像)的算法高阶张量，我们应用张量增强方案。上面提到的kA将三阶张量重塑为高阶张量。不更改张量。具体来说，我们从一个三阶张量T∈R256×256×3九阶T∈？r4×4×4×4×4×3然后应用张量补全用于计算其缺失项的算法。我们执行辣椒和莉娜缺失图像的仿真每个图像的条目被随机选择，根据分布均匀，漏磁比从0.5到0.5不等。0.9.在图9中，算法在补全时的性能。胡椒图片显示。当图像被表示时通过一个三阶张量，stdc算法执行得非常好。与所有方法相比，ALS算法都在执行。差，其余的算法具有相似的性能。然而，对于九阶张量，算法的性能被严格区分。具体来说，我们提出的算法(特别是tma-tt)反对所有其他方法，这在图4先生=0.9。这表明我们提出的算法在增广张量的情况下给出了很好的结果。此外，利用Ka格式增加张量阶，SiLRTC-TT和TMac-TT至少可以与STDC相媲美，对于MR=0.9，TMac-TT的RSE最低。更多准确地说，tma-tt给出了rse≈0.156的最佳结果。当使用Ka计划时。在Lena图像上进行的实验结果图6和图6显示了MR=0.9的恢复结果。图10分别。结果表明，tmac-tt给出了使用Ka时，每个MR的最佳结果(最低的RSE)计划。对于House图像，现在选择缺少的条目作为白色文本，因此丢失率是固定的。结果是如图7所示。STDC提供最好的性能增强，而所有其他算法是可比较的。然而，文本的轮廓仍然可以清晰地看到。STDC图像。使用张量增强，tma-tt和tmac-Square提供了最好的性能，其中文本是几乎完全删除使用麦迪-TT。

1. 视频补全

与市场扩大在彩色视频补全过程中，我们对FBCP、ALS、TMAC，TMac-TT和Tma-Square针对两个视频，新的约克市(纽约)和公共汽车2。其他方法是计算上的。在本实验中，N≥4不适用于难处理或不适用。对每个视频执行以下预处理：将视频调整为大小为81×729×1024×3的张量(帧×图像行×图像列×RGB)。每个视频的第一帧可以在图中看到。8A和8b。|||框架模式与图像行模式合并，以形成三阶张量，我们在这里定义为视频序列。张量(Vst)，59，049×1024×3(合并行×3)图像列×RGB)。可以看到VST的例子。在20000：20700范围内的组合行在无花果。8C和8D。因此，而不是在每个框架，我们执行张量补全基准。在整个视频里。必须强调的是，我们只基准测试，并增加了一个(而不是第三阶)vst。由于高维测井仪计算困难张量使用Ka，将VST重塑为低维高阶尺寸为6×6×6×6×6×6×6×6×3的张量。|||11阶vst直接用于张量补全。算法。

对于95%缺失项的情况，基准结果可以在无花果中看到。11和12。纽约的结果是图11显示FBCP和ALS是完全不可理解的，而只有基于tmac的算法才能成功补全视频。此外，在这种情况下，TMacTT优于所有算法，可以从RSE和平均结构相似指数[48]表II中所有81帧的MR=0.95。对于公共汽车的结果图12，tma-tt优于所有算法.另一个TT基于秩的算法als只能管理一个简单的结构。，而fbcp不能产生任何类似于原始视频。表三汇总了RSE和平均数有90%的条目缺失，结果是然而，与95%缺失条目的情况类似，tma-tt和tmac-Square的性能相比，纽约的视频。在纽约与Mr=0.7的视频中，表二显示所有基于tmac的算法都可以与fbcp进行比较。而ALS无法再现足够的近似。在公共汽车视频，tma-tt和tmac-Square提供了类似的功能。和Ssim。综上所述，巴士的视频包含了更有活力的色彩。和NYC视频的纹理相比，从表二和表二的整体ssim性能可以清楚地看出这一点。iii.强调tmac-tt仍然提供高质量(ssim=0.807)近似缺失率(MR=0.95)检验，其中最优的结果是Tma-Square只有ssim=0.582.这说明Tmac-TT算法的优越性对于高丢失率视频补全问题。

**|||||||**

本文提出了基于TT秩的LRTC问题的一种新方法，并介绍了它的相关算法。解决办法。定义了SiLRTC-TT算法以最小化。利用TT核范数优化方法求张量的TT秩。同时，提出了基于多线性矩阵因式分解模型，使TTRANE最小化。后者的计算效率更高，因为它不需要SVD。提出的算法用于模拟合成数据和真实世界数据。由高阶张量表示。对于合成数据，我们的当张量有低TT秩有优势。在这种情况下，它们的性能与低tucker张量秩是相当的。。基于TT的算法包括当应用于实际世界的数据时，非常有希望和可靠。为了验证这一点，我们研究了图像和视频的补全。问题。基准测试结果表明，当应用于原始不增加张量的张量，我们的算法是在图像补全方面可与STDC媲美。但是，在在增广张量的情况下，我们提出的算法不仅优于其他的，但也提供了更好的恢复结果。与没有张量的情况相比在图像和视频补全实验中。基于TT秩优化的应用数据压缩、文本挖掘、图像的张量补全分类和视频索引是我们感兴趣的。